Exercice spé math du 10 mars 2020

On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ».
On sait que :

- si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,5$ et celle qu'il soit pluvieux est $0,1$;
- si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,2$ et celle qu'il soit pluvieux est $0,7$;
- si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,6$ et celle qu'il soit ensoleillé $0,2$.

Pour tout entier naturel n, on note les évènements :

- A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours » ;
- B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours » ;
- C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours ».

Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des évènements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$.
On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.
On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,2$.

2. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad R\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + R$.

b. Soit $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que $Y = MY + R$. Démontrer que $\alpha = \beta = 0,25$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - Y$.

a. En utilisant la question 2., vérifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, $V_n = M^n V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel strictement positif n,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2\times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n \\ 2\times 0,2^n - 2\times 0,1^n & 2\times 0,1^n - 0,2^n \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier strictement positif n.

b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0,5 + 3\times 0,1^n - 3,5\times 0,2^n$.

La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser $0,5$?