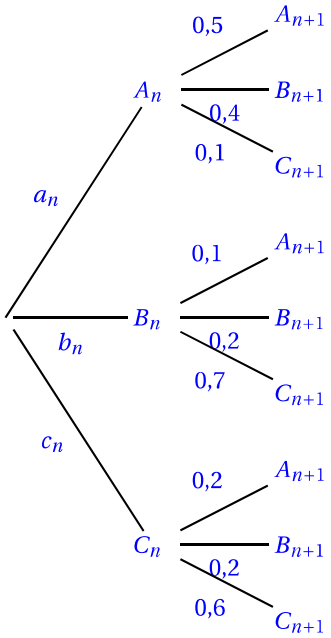
- si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,5 et celle qu'il soit pluvieux est 0,1 ;
- si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,2 et celle qu'il soit pluvieux est 0,7 ;
- si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,6 et celle qu'il soit ensoleillé 0,2.

Pour tout entier naturel $n$, on note les évènements :

- $A_n$ : « le temps est ensoleillé au bout de $n$ jours » ;
- $B_n$ : « le temps est nuageux sans pluie au bout de $n$ jours » ;
- $C_n$ : « le temps est pluvieux au bout de $n$ jours ».

Pour tout entier naturel $n$, on note respectivement $a_n$, $b_n$ et $c_n$ les probabilités des évènements $A_n$, $B_n$ et $C_n$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $a_n + b_n + c_n = 1$.
On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.
On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

**1. a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$.




Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a, pour tout entier naturel $n$,

$$p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) + p(C_n \cap A_{n+1}) \iff a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$$

**b.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2$.
On sait que $a_n + b_n + c_n = 1 \iff c_n = 1 - a_n - b_n$. En remplaçant cette dernière égalité dans l'équation de la question précédente, on obtient, pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n &\iff a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2 \times (1 - a_n - b_n) \\ &\iff a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2 \end{aligned}$$

On admet que, pour tout entier naturel $n$, $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,2$.

**2.** On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad R\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

**a.** Justifier que pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = MU_n + R$.
On calcule le produit matricielle

$$MU_n + R = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2 \\ 0,2a_n + 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

**b.** Soit $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que $Y = MY + R$. Démontrer que $\alpha = \beta = 0,25$.

$$Y = MY + R \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} \alpha = 0,25 \\ \beta = 0,25 \end{cases}$$

**3.** Pour tout entier naturel $n$, on pose $V_n = U_n - Y$.

**a.** En utilisant la question 2., vérifier que, pour tout entier naturel $n$, $V_{n+1} = MV_n$.
Pour tout entier naturel $n$, on a

$$V_{n+1} = U_{n+1} - Y = MU_n + R - Y = MU_n - MY = M(U_n - Y) = MV_n$$

car $Y = MY + R \iff R - Y = -MY$ et en utilisant deux fois la relation $V_n = U_n - Y$.

**b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n$ strictement positif, $V_n = M^n V_0$.
**Initialisation :** Plutôt que de faire des gros calculs matriciels, utilisons les relations précédemment démontrées et ce qu'on nous donne. Pour $n = 1$, on a

$$M^1 V_0 = MV_0 = M(U_0 - Y) = MU_0 - MY = MU_0 - (Y - R) = MU_0 + R - Y.$$

et

$$V_1 = U_1 - Y = MU_0 + R - Y.$$

Ces deux relations nous donnent $V_1 = M^1 V_0$, donc la propriété est satisfaite pour $n = 1$.
**Hérédité :** Supposons la propriété établie à un certain rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $V_n = M^n V_0$ (**H.R.**).
Montrons que cette propriété reste vraie au rang $n+1$ (But : $V_{n+1} = M^{n+1} V_0$).

$$V_{n+1} = MV_n \overset{\text{(H.R)}}{=} MM^n V_0 = M^{n+1} V_0$$

Ainsi la propriété est héréditaire.
La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang $n \geqslant 1$, elle est vraie au rang $n+1$ : d'après le principe de récurrence la relation est vraie pour tout naturel supérieur ou égal à 1 : $V_n = M^n V_0$.

**4.** On admet que, pour tout entier naturel strictement positif $n$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n \\ 2 \times 0,2^n - 2 \times 0,1^n & 2 \times 0,1^n - 0,2^n \end{pmatrix}.$$

**a.** Déterminer l'expression de $a_n$ en fonction de l'entier strictement positif $n$.
Puisque $V_n = M^n V_0$, on en déduit que $U_n = M^n V_0 + Y = M^n(V_0 - Y) + Y$, ce que l'on réécrit par

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n \\ 2 \times 0,2^n - 2 \times 0,1^n & 2 \times 0,1^n - 0,2^n \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

De ceci, on en déduit que, pour tout entier naturel $n$, $a_n = 1,75 \times 0,2^n - 0,1^n + 0,25$.

**b.** Déterminer la limite de la suite $(a_n)$.
Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n$, par somme de limites, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,25$$

**c.** On admet que, pour tout entier naturel $n$, $c_n = 0,5 + 3 \times 0,1^n - 3,5 \times 0,2^n$.
La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de $n$ jours peut-elle dépasser $0,5$ ?
$c_n > 0,5 \iff 3 \times 0,1^n - 3,5 \times 0,2^n > 0 \iff \left(\frac{0,1}{0,2}\right)^n > \frac{3,5}{3} \iff n \ln\left(\frac{0,1}{0,2}\right) > \ln\left(\frac{3,5}{3}\right)$ par croissance de la fonction logarithme.
Or, $\ln\left(\frac{0,1}{0,2}\right) = -\ln(2) < 0$ et $\ln\left(\frac{3,5}{3}\right) = \ln(7) - \ln(6) > 0$, donc $c_n > 0,5 \iff n < \dfrac{\ln(7) - \ln(6)}{-\ln(2)} < 0$ : ceci est impossible car $n$ est un entier naturel, donc positif.
Ainsi, la probabilité que le temps soit pluvieux au bout de $n$ jours ne peut pas dépasser $0,5$.