En dynamique de populations, il est fréquent que les populations de deux espèces animales interagissent.
Dans les années 1920-1930, l'italien Vito Volterra et l'américain Alfred James Lotka ont mené séparément des recherches sur des systèmes où des prédateurs (requins ou lynx) et leurs proies (sardines en mer Adriatique ou rongeurs) sont liés, dans un milieu stable. Voici une version simplifiée de leur modèle.

Pour tout entier naturel n, on note R_n l'effectif de la population de proies et L_n l'effectif de la population de prédateurs

Pour tout entier naturel n, on note R_n l'effectif de la population de proies et L_n l'effectif de la population de prédateurs au bout de n années après l'introduction des prédateurs.

On fait les hypothèses que d'une année à l'autre :

- le taux d'accroissement des proies est une fonction affine décroissante du nombre de prédateurs :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 0,\ \frac{R_{n+1} - R_n}{R_n} = a - bL_n,$$

où a et b sont des réels positifs ;

- le taux d'accroissement des prédateurs est une fonction affine croissante du nombre de proies :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 0,\ \frac{L_{n+1} - L_n}{L_n} = cR_n - d,$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(E) : \begin{cases} R_{n+1} = (1+a)R_n - bL_nR_n \\ L_{n+1} = cL_nR_n + (1-d)L_n \end{cases}.$$

<u>Première partie : tableur :</u>

1 Ici $R_0 = 3\,000$; $L_0 = 90$; $a = 0{,}06$; $b = 0{,}0001$; $c = 0{,}00005$ et $d = 0{,}1$.

a. Réaliser la feuille de calculs ci-dessous, en entrant des formules en D3 et E3, de façon à calculer les 500 premiers termes de (R_n) et (L_n).

	A	B	C	D	E
1	*a*	0,06	*n*	R_n	L_n
2	*b*	0,0001	0	3000	90
3	*c*	0,00005	1	3153	94,5
4	*d*	0,1	2	3312,4	99,948
5			3	3478	106,51

b. Réaliser un graphique, puis répondre aux questions :
- Est-ce que le nombre de proies augmente quand le nombre de prédateurs augmente ?
- Est-ce que le nombre de prédateurs augmente quand le nombre de proies diminue ?

2 a. Prendre $R_0 = 2\,000$ et $L_0 = 0$. Observer et expliquer.

b. Prendre $R_0 = 0$ et $L_0 = 700$. Observer et expliquer.

3 a. Prendre $R_0 = 2\,000$ et $L_0 = 600$. Que constate-t-on ?

b. Choisir des valeurs de R_0 et L_0 « proches » de 2 000 et 600. Que constate-t-on ?

4 On reprend :
$R_0 = 3\,000$ et $L_0 = 90$.

a. Diminuer la valeur du paramètre a.
Observer et expliquer.

b. Augmenter la valeur du paramètre b.
Observer et expliquer.

c. Procéder de la même façon avec c et d. Interpréter.

<u>Deuxième partie. Avec des matrices.</u>

Dans la suite de l'exercice, on se place autour du point d'équilibre $\left(\frac{d}{c} ; \frac{a}{b}\right)$, c'est-à-dire que $R_0 \approx \frac{d}{c}$ et que $L_0 \approx \frac{a}{b}$. On admet qu'alors le système (E) peut être approché par le système :

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n - \dfrac{bd}{c}L_n + \dfrac{ad}{c} \\ L_{n+1} = \dfrac{ca}{b}R_n + L_n - \dfrac{ad}{b} \end{cases}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ L_n \end{pmatrix}$.

on choisit $a = 0{,}06$, $b = 0{,}0001$, $c = 0{,}00005$ et $d = 0{,}1$ $(R_0 \approx 2\,000$ et $L_0 \approx 600)$.

Déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne C telles que pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = A \times U_n + C.$$

a. Justifier que la matrice $U = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 600 \end{pmatrix}$ vérifie :

$$U = A \times U + C.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} - U = A \times (U_n - U),$$

puis que $U_n = U + A^n \times (U_0 - U)$.

b. On choisit $R_0 = 2\,010$ et $L_0 = 610$.
À la calculatrice, estimer les populations de chaque espèce au bout de 5 ans, de 10 ans, de 50 ans et de 100 ans.

c. Même question avec $R_0 = 1990$ et $L_0 = 605$.

4 a. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} R_{n+1} - R_n = 0{,}2(600 - L_n) \\ L_{n+1} - L_n = 0{,}03(R_n - 2\,000) \end{cases}.$$

En déduire que la population des proies augmente si le nombre des prédateurs est inférieur à 600, et vice-versa. Et pour la population des prédateurs ?