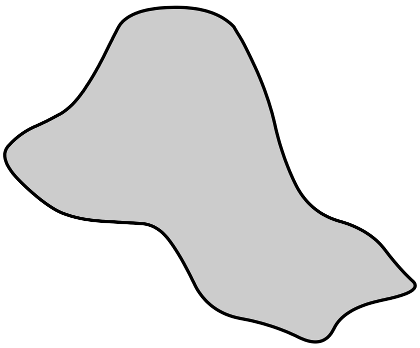
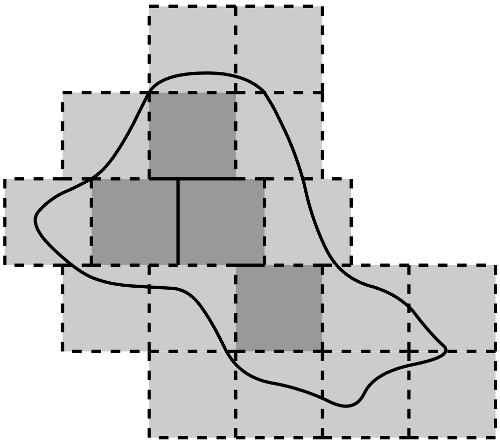
LOIS DE PROBABILITE CONTINUE

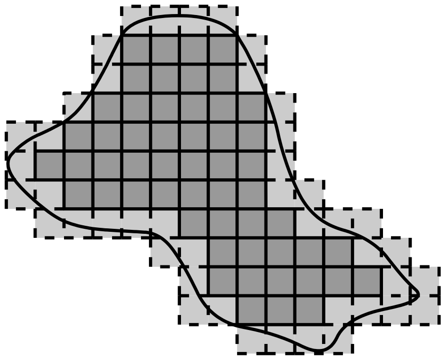
I) Notion d'aire :

1) Encadrement de l'aire d'un domaine fermé :

L'aire d'un domaine limité par une courbe fermée et continue peut-être encadré par deux suites. Plus le quadrillage est fin, plus l'encadrement est précis.





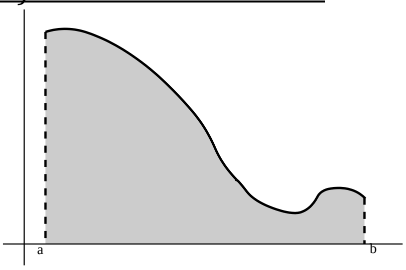


A

Unité d'aire :
Grand carreau : < A <
Petit carreau : < A <

Unité d'aire :
Petit carreau : < A <

2) Aire sous une courbe :



f désigne une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

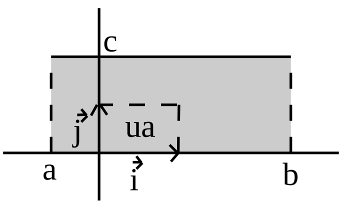
L'aire sous la courbe de la fonction f sur $[a\,;b]$ est l'aire du domaine D constitué des points M $(x\,;y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

On appelle **intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre qui exprime l'aire** (en unité d'aire) **de ce domaine $\mathscr{D}$. On note $\int_a^b f(x)dx$** .

Remarques : a) le symbole se lit « somme de a à b de $f(x)dx$ » ou « intégrale de a à b de $f(x)dx$ ».
b) On note indifféremment $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(u)du$ …

3) Exemples :

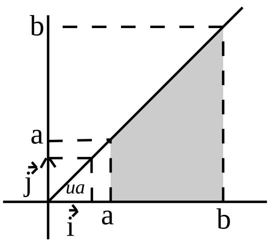
a) Fonction constante :



f désigne une fonction définie sur $[a\,;b]$ par $f(x) = c$ où c est un réel positif.

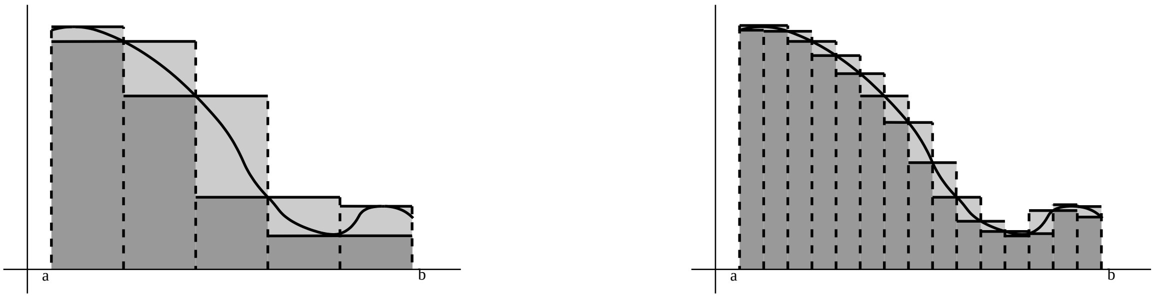
L'aire sous la courbe de f est $A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b c dx$ = c$(b-a)$ ua.

b) Fonction $f(x) = x$:



f désigne une fonction définie sur $[a\,;b]$ par $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}+$.
L'aire sous la courbe de f est A , l'aire du trapèze grisé, soit :
$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b x dx = \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} = \frac{(a+b)(b-a)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}\ ua$

3) Encadrement de l'aire sous la courbe – Méthode des rectangles :



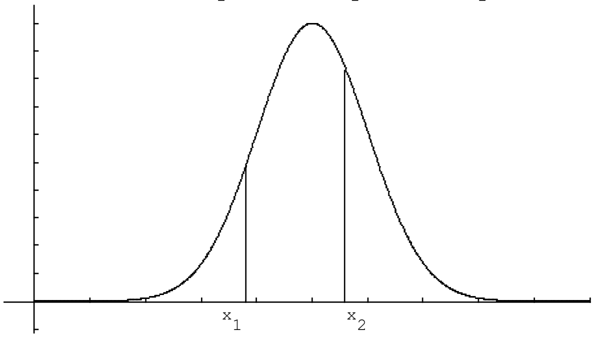
f désigne une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;b]$.
L'aire sous la courbe de la fonction f peut-être encadrée par la somme des aires des rectangles contenus sous la courbe et des rectangles contenant la courbe. Plus on augmente le nombre de rectangles, plus leur largeur est petite et plus l'encadrement est précis.
Par exemple, en utilisant cette méthode pour la fonction carré sur l'intervalle [0 ; 1], on obtient :

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \text{ (voir activité).}$$

II) lois de probabilités continues :

1) Généralités :

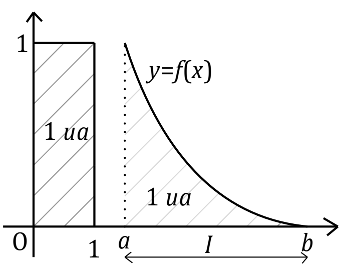
Jusqu'à présent, chaque expérience aléatoire conduisait à un univers fini et chaque variable aléatoire prenait un nombre fini de valeurs. Mais les issues d'une expérience ou les valeurs prises par une variable aléatoire peuvent aussi être n'importe quel nombre dans un intervalle I de ⊕. Dans ce cas, il est impossible de définir une loi de probabilité P sur I en se donnant la probabilité de chacun des éléments de I. Les événements que l'on va alors étudier sont de la forme « obtenir un nombre entre a et b de I » plutôt que « obtenir tel ou tel réel de I ».
C'est le cas de l'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice qui détermine un nombre décimal dans l'intervalle [0 ;1[
C'est le cas aussi lors des appels téléphoniques à un standard : la durée de chacun des appels définit une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un intervalle de temps.
C'est le cas, par exemple, lorsqu'on étudie la répartition du poids d'un bébé de 14 mois. On représente l'histogramme des fréquences du poids de tous les bébés. On définit alors la fonction f qui donne la fréquence d'apparition du poids d'un bébé (fonction qui se déduit de l'histogramme).



On peut alors définir la probabilité de l'événement $\{X \in [x_1\ ;\ x_2]\}$ qu'un bébé ait un poids compris entre x_1 et x_2, en déterminant l'aire du domaine sous la courbe compris entre x_1 et x_2.

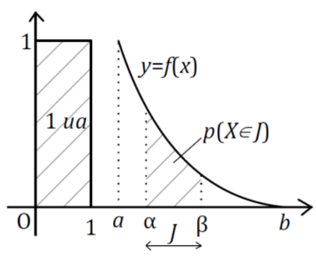
On peut noter $p(X\in[x_1\ ;x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

2) Densité et loi de probabilité sur un intervalle I.



a) Une fonction f définit une densité de probabilité sur l'intervalle I lorsque f est continue et positive sur I et lorsque l'aire sous la courbe de la fonction f sur I est égale à 1.

b) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue un réel de l'intervalle I. Pour tout intervalle J contenu dans I, $p(X \in J)$, la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, est l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle J.



Exemple : si I = [a ; b] et J = [α ; β], alors on doit avoir $\int_a^b f(x)dx = 1$ et la probabilité de l'événement $\{X \in [\alpha;\beta]\}$ est $p(X \in [\alpha;\beta])=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

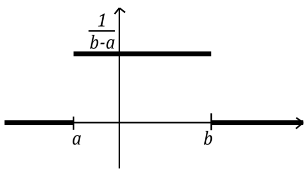
c) Espérance : **L'espérance mathématique d'une variable aléatoire *X*, dont la densité de probabilité est la fonction *f* définie sur un intervalle [*a* ; *b*], est E(X) = $\int_a^b xf(x)dx$.**

d) Remarques :

- La probabilité de l'événement $\{X = \alpha\}$ est donc $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$ (aire d'un domaine de largeur nulle)
- Il en résulte que $p(X \in]a ;b[) = p(X \in [a ;b]) = \ldots$
- Si J et J' sont deux intervalles tels que J$\subset$J', $p(X\in \text{J}) \leqslant p(X\in \text{J}')$.
- La probabilité de la réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints est la somme des probabilités de chaque intervalle.
- Si J et J' sont deux intervalles complémentaires de I, $p(X\in \text{J}') = 1 - p(X\in \text{J})$.

III) Premier exemple : la loi uniforme

1) **Une variable aléatoire *X* suit une loi uniforme sur [*a* ; *b*] lorsque sa densité de probabilité *f* est constante sur [*a* ; *b*].**



Dans ce cas, on doit avoir $\int_a^b f(x)dx = 1$. f étant constante sur [a ; b] (soit k cette constante), on cherche donc l'aire du rectangle de largeur k et de longueur $b - a$, à savoir $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx = k(b - a)$.

D'où, $k(b - a) = 1$ ce qui équivaut à $k = \frac{1}{b-a}$. **Pour tout $x \in [a ; b]$, $f(x) = \frac{1}{b-a}$.**

2) Probabilité de l'événement $\{X \in [\alpha ;\beta]\}$ où $[\alpha ;\beta]$ désigne un intervalle de [a ; b].

$p(X\in [\alpha ;\beta]) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}(\beta - \alpha) = \frac{longueur\ de\ [\alpha\ ;\ \beta]}{longueur\ de\ [a\ ;\ b]}$.

$$\boldsymbol{p(X\in [\alpha;\beta]) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}}.$$

3) Espérance :

$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx$. La fonction de l'intégrale est ici la fonction linéaire $g : x \mapsto \frac{1}{b-a}x$.

L'aire sous la courbe de cette fonction est donc l'aire du trapèze de petite base $g(a) = \frac{a}{b-a}$, de grande base $g(b) = \frac{b}{b-a}$ et de hauteur $b - a$. L'aire de ce trapèze est donc : $\frac{\left(\frac{a}{b-a}+\frac{b}{b-a}\right)(b-a)}{2} = \frac{\left(\frac{a+b}{b-a}\right)(b-a)}{2} = \frac{a+b}{2}$

L'espérance d'une variable aléatoire *X* qui suit la loi uniforme sur [*a* ; *b*] est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

4) Exemple :

La loi uniforme sur un intervalle [a ; b] est le modèle que l'on utilise lorsqu'on choisit un nombre aléatoire dans l'intervalle [a ; b]. Par exemple, choisir un réel quelconque dans [-1 ; 4] se modélise par la variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur [-1 ; 4].

La densité f est constante et égale à $\frac{1}{4-(-1)} = \frac{1}{5}$.

On a, par exemple, probabilité d'obtenir exactement le nombre π : $p(X = \pi) = 0$

probabilité d'obtenir un nombre de [-1 ; 1] : $p(X \in [-1 ; 1]) = \frac{1-(-1)}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$.

$E(X)$, l'espérance de X est $E(X) = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$.