LOIS EXPONENTIELLES

I) loi de durée de vie sans vieillissement

1) La durée de vie d'un individu est, au sens probabiliste, une variable aléatoire T à valeurs dans [0 ;+∞[où l'événement (T ⩾ t), avec $t \geqslant 0$ signifie que l'individu est vivant à l'instant t.
On dit alors que T suit une loi de durée de vie sans vieillissement si la probabilité que l'individu soit vivant à l'instant $t + h$, $h \geqslant 0$, sachant qu'il est vivant à l'instant t, ne dépend pas de t. Autrement dit : $p_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h)$ ne dépend pas de t.

2) On a en particulier, pour $t = 0$:

T ⩾ 0 est l'événement certain, donc $p(T\geqslant 0) = 1$.

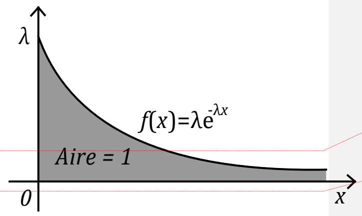
$p_{T\geqslant 0}(T \geqslant h) = \frac{p((T\geqslant h)\cap(T\geqslant 0))}{p(T\geqslant 0)} = \frac{p(T\geqslant h)}{1} = p(T\geqslant h)$.

3) $p_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = \frac{p((T\geqslant t+h)\cap(T\geqslant t))}{p(T\geqslant t)} = \frac{p(T\geqslant t+h)}{p(T\geqslant t)}$. Or, par définition, puisque que $p_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h)$ ne dépend pas de t, on a alors, avec t =0, $\frac{p(T\geqslant t+h)}{p(T\geqslant t)} = \frac{p(T\geqslant h)}{p(T\geqslant 0)} = p(T \geqslant h)$.

Propriété : **Une variable aléatoire T suit une loi de durée de vie sans vieillissement si et seulement si, pour tous réels positifs t et h, $p_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = p(T \geqslant h)$.**

II) Loi exponentielle de paramètre λ

1) Définition : **Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité f est définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.**



Remarque : f n'est pas définie sur un intervalle fermé. Cependant, f est continue et positive sur [0 ; +∞[. Soit a étant un réel positif, on démontrera à l'aide du chapitre sur l'intégration que :

$$\int_0^a f(x)dx = 1-e^{-\lambda a}.$$

Or, $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-\lambda a} = 0$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} 1-e^{-\lambda a} = 1$ soit : $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)dx = 1$. C'est-à-dire que l'aire sous la courbe de la fonction f est bien égale à 1. f désigne bien une densité de probabilité.

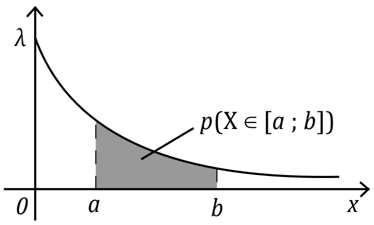
2) Probabilités des événements :

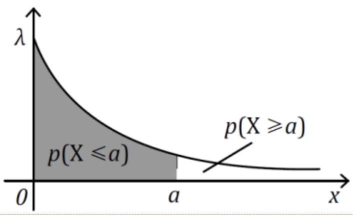
a) a et b étant 2 réels positifs tels que $a \leqslant b$, on démontrera à l'aide du chapitre sur l'intégration que :

$p(X \in [a ; b])$ ______________________________. $\boxed{\boldsymbol{p(X \in [a\,;\,b]) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}}$

b) $p(X \leqslant a)$ ______________________________. $\boxed{\boldsymbol{p(X \leqslant a) = 1-e^{-\lambda a}}}$

c) $p(X \geqslant a)$ ______________________________. $\boxed{\boldsymbol{p(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}}}$





Commentaire [A1]: C'est la définition d'une loi de durée de vie sans vieillissement

Commentaire [A2]: C'est une probabilité conditionnelle. Elle se lit "probabilité que T soit supérieur ou égal à t+h sachant que T soit supérieur ou égal à t

Commentaire [A3]: Une durée de vie T est toujours positive

Commentaire [A4]: Définition d'une probabilité conditionnelle

Commentaire [A5]: Calcul de l'intersection et de la valeur de $p(T \geqslant 0)$

Commentaire [A6]: Memes remarques qu'au point 2)

Commentaire [A7]: On remplace t par 0

Commentaire [A8]: Propriété à connaitre par coeur

Commentaire [A9]: À connaitre

Commentaire [A10]: Donc, ce n'est pas à faire pour l'instant

Commentaire [A11]: Résultat sur les fonctions exponentielles

Commentaire [A12]: Car $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, alors f est bien continue et positive sur les réels positifs, et l'aire sous la courbe définie au chapitre précédent vaut bien 1.

Commentaire [A13]: Donc, ce n'est pas à faire pour l'instant

Commentaire [A14]: Avec les probas continues, toujours bien penser à visualiser graphiquement ce que vous faites

3) Propriété : **si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors X suit une loi de durée de vie sans vieillissement.**

Démonstration (BAC) : Utilisons la propriété du I).
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
$p_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = \frac{p((X\geqslant t+h)\cap(X\geqslant t))}{P(X\geqslant t)} = \frac{P(X\geqslant t+h)}{P(X\geqslant t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = p(X \geqslant h)$.

X suit donc une loi de durée de vie sans vieillissement.

4) Espérance de la loi exponentielle de paramètre λ :
a) Propriété : **L'espérance de la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est : E(X) = $\frac{1}{\lambda}$.**

b) Démonstration (BAC) :
La loi de densité de f étant définie sur [0 ; +∞[, l'espérance de X est définie par $\lim_{a \to +\infty} \int_0^a xf(x)dx$, où a désigne un réel positif.

Commentaire [A15]: La démonstration est à savoir faire tout de suite en utilisant les définitions et propriétés connues dans ce chapitre

Commentaire [A16]: Donc, à savoir faire le jour du bac

Commentaire [A17]: Définition d'une proba conditionnelle

Commentaire [A18]: Simplification de l'intersection

Commentaire [A19]: Application des formules de la page 1

Commentaire [A20]: Propriétés de la fonction exponentielle

Commentaire [A21]: Simplification de la fraction par $e^{-\lambda t}$

Commentaire [A22]: La propriéte du I.3) est donc vérifiée donc, X suit...

Commentaire [A23]: À connaitre

Commentaire [A24]: Cette démonstration n'est pas à faire pour l'instant car on a besoin de résultats sur le calcul intégral d'un prochain chapitre