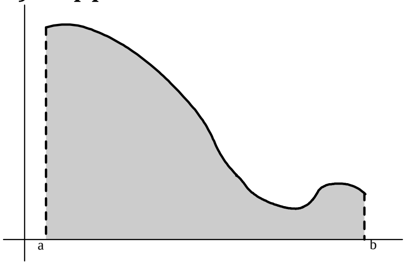
CALCUL INTEGRAL

I) Interprétation graphique, valeur moyenne et signe d'une intégrale

1) Rappel : aire sous une courbe :



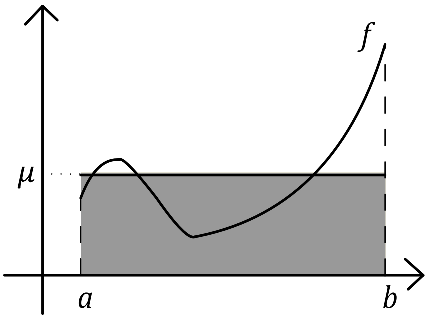
f désigne une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

L'aire sous la courbe de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ est l'aire du domaine D constitué des points M $(x\ ;\ y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

On appelle **intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ le nombre qui exprime l'aire** (en unité d'aire) **de ce domaine D. On note $\int_a^b f(x)dx$.**

2) Valeur moyenne d'une fonction :

a) Définition : **Si f est une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, la valeur moyenne de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.**

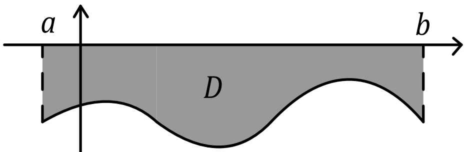


b) Interprétation graphique :

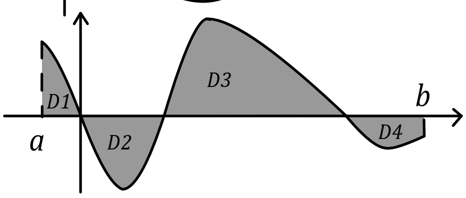
Soit $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. On a $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$. Or, géométriquement, $\mu(b-a)$ représente l'aire d'un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur μ. La valeur moyenne d'une fonction est donc représentée par la largeur du rectangle de longueur $b-a$ et d'aire égale à l'aire sous la courbe de f.

3) Intégrale d'une fonction de signe quelconque :

On convient des règles suivantes :



a) si f est une fonction continue et négative sur $[a\ ;\ b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = -$A où A désigne l'aire du domaine D constitué des points M$(x\ ;\ y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.

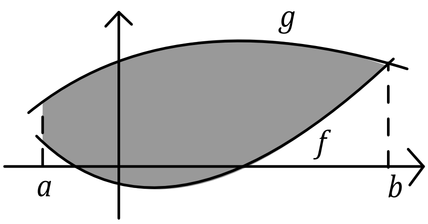


b) Si f est quelconque sur $[a\ ;\ b]$, on a, par exemple :

$\int_a^b f(x)dx$ = aire (D1) – aire(D2) + aire(D3) – aire(D4)

c) La définition de la valeur moyenne d'une fonction peut-être étendue au cas des fonctions de signe quelconque.

4) Aire d'un domaine entre deux courbes sur $[a\ ;\ b]$:



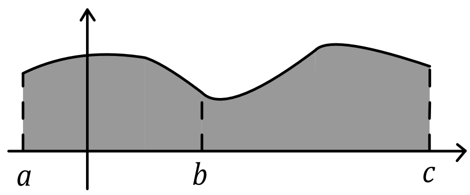
f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ telles que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $g(x) \geqslant f(x)$. L'aire du domaine limité par les courbes représentatives de f et de g, et par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b (g-f)(x)dx$.

II) Propriétés d'une intégrale

Dans la suite de ce paragraphe, *f* et *g* désignent deux fonctions continues sur un intervalle I, *a*, *b* et *c* sont trois réels de I et λ est un réel quelconque.

1) $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$

2) Relation de Chasles :



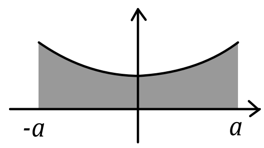
$\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$

3) Comme $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$ alors on a $\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$

Cas particuliers :

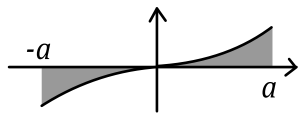
a) si *f* est une fonction paire

$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ d'où $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$



b) si *f* est une fonction impaire

$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ d'où $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

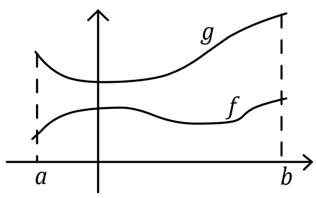


4) Linéarité de l'intégrale :

$\boxed{\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx}$ et $\boxed{\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$

5) Positivité : $\boxed{\textbf{si pour tout } x \in [a\,;\,b]\ f(x) \geqslant 0 \textbf{ alors } \int_a^b f(x)dx \geqslant 0}$

6) Ordre :



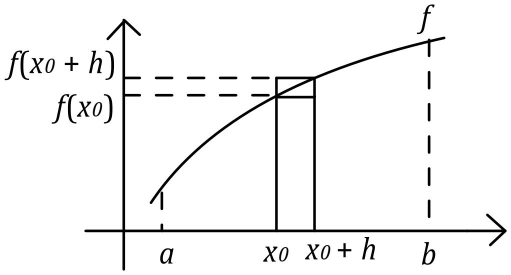
$\boxed{\textbf{si pour tout } x \in [a\,;\,b]\ f(x) \leqslant g(x) \textbf{ alors } \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx}$

III) Intégrales et primitives

1) Théorème : **f est une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b]. La fonction F définie sur [a ; b] par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur [a ; b] et $F'(x) = f(x)$.**

Plus particulièrement, F est l'unique primitive de *f* qui s'annule en *a*.

2) Principe de la démonstration **(BAC)** :



On se place dans le cas où *f* est continue, positive et strictement croissante sur I = [*a* ; *b*].

x_0 est un réel de I, *h* un réel différent de 0 tel que $x_0 + h \in$ I.

a) Si $h > 0$, $x_0 < x_0 + h$, et comme *f* est strictement croissante, $f(x_0) < f(x_0 + h)$.

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

$F(x_0 + h) - F(x_0)$ est donc l'aire sous la courbe de *f* entre x_0 et $x_0 + h$. Par encadrement de cette aire par deux rectangles, on a alors : $(x_0 + h - x_0)f(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant (x_0 + h - x_0)f(x_0 + h)$ soit $hf(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant hf(x_0 + h)$. Comme $h \neq 0$, on a alors : $f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$.

b) De même, lorsque $h < 0$ on montre que $f(x_0 + h) \leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.
c) f étant continue sur I, elle est continue en x_0 donc, $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$, c'est-à-dire que F est dérivable en tout x_0 de $[a ; b]$ et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

d) Complément du théorème : F est donc une primitive de f sur I. On a de plus $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. F est donc bien l'unique primitive de f qui s'annule en a (voir propriété vue sur l'unicité du chapitre sur les primitives).

On admet que ce résultat peut s'étendre au cas général d'une fonction continue sur $[a ; b]$.

3) Application au calcul intégral :
a) Posons $F_1(x) = \int_a^x f(t)dt$ et F_2 une autre primitive de f sur $[a ; b]$. D'après les théorèmes sur les primitives, on sait que $F_2(x) = F_1(x) + k$ où k désigne une constante réelle.
$F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) + k - F_1(a) - k = F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. On en déduit la propriété suivante :
b) Propriété : **f étant une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ et F une primitive de f sur $[a ; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.**
Remarque : pour des raisons pratiques pour mener un calcul, $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(x)]_a^b$.

c) Application : déterminons A, l'aire sous la courbe de la fonction sinus sur $[0 ; \pi]$.
$A = \int_0^\pi sin(x)dx = [-cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2$ unités d'aire.

Cette propriété s'étend aux fonctions continues et de signe quelconque sur $[a ; b]$.
A partir de cette propriété, on peut démontrer algébriquement toutes les propriétés d'une intégrale qui ont été vues au paragraphe II) à partir de notions sur les aires.

4) Montrons dans cette partie un résultat sur les primitives que l'on avait laissé de côté.
a) Théorème : **Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I**.

b) Démonstration **BAC** :
On se place dans le cas où I est un intervalle fermé que l'on note $[a ; b]$.
On suppose de plus, **comme pré-requis**, que toute fonction continue sur $[a ; b]$ admet un minimum sur $[a ; b]$.
Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$. On appelle m son minimum sur $[a ; b]$. Alors, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) - m \geqslant 0$. D'après le théorème du III.1), la fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ admet une primitive G sur $[a ; b]$ telle que $G'(x) = f(x) - m$.
Soit F la fonction définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = G(x) + mx$. F est dérivable sur $[a ; b]$ comme somme de deux fonctions dérivables et $F'(x) = G'(x) + m = f(x) + m - m = f(x)$. F est donc une primitive de f sur $[a ; b]$.