

**89 1 a.** Par la relation de Chasles,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0,$$

car la courbe représentative de  $f$  est symétrique par rapport à l'origine  $O$ . Donc  $\int_0^a f(x) dx = -\int_{-a}^0 f(x) dx$ .

**b.** Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx, \end{aligned}$$

car la courbe représentative de  $f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$\text{Donc } \int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

**2**  $I_1 = 0$ , car la fonction sinus est impaire sur  $[-\pi; \pi]$ .

$I_2 = 2 \int_0^3 (3x^2 + x) dx = 2 \left[ x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 63$ , car la fonction  $x \mapsto 3x^2 + |x|$  est paire.

**90 1**  $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2).$

**2** Par linéarité,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } J = \frac{1}{2} - I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

**92 1** Pour tout réel  $x \geq 1$ , on a :

$x^2 + 1 \geq x^2.$

Donc  $\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{x^2}$ , c'est-à-dire  $f(x) \geq x$ .

$x^2 + 1 \leq x^2 + x \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$

$$\text{Donc } \sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2},$$

c'est-à-dire  $f(x) \leq x + \frac{1}{2}.$

**2** En intégrant les inégalités précédentes sur  $[1; 3]$ , on

$$\text{obtient : } \int_1^3 x dx \leq \int_1^3 f(x) dx \leq \int_1^3 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx,$$

$$\text{soit : } \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^3 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_1^3.$$

$$\text{Donc : } 4 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 5.$$

**95 a.** Approximativement, il faut situer le terrain nivelé à une hauteur de 110 m.

$$\begin{aligned} \text{b. } h &= \frac{1}{400} \int_0^{400} h(x) dx \\ &= \frac{1}{400} \int_0^{400} \left( \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 125 \right) dx \\ &= \frac{1}{400} \left[ \frac{x^3}{4800} - \frac{x^2}{8} + 125x \right]_0^{400} = \frac{325}{3} \approx 108,3. \end{aligned}$$