

TS – CORRECTION DU DEVOIR N°17

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance, en kilomètres, que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/82$. Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1.a) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 km.

Il faut calculer $p(D \in [50 ; 100]) = e^{-\frac{1}{82} \times 50} - e^{-\frac{1}{82} \times 100} \approx 0,248$.

1.b) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit supérieure à 300 km.

Il faut calculer $p(D \geq 300) = e^{-\frac{1}{82} \times 300} \approx 0,026$.

2) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

Il faut calculer $p_{(D \geq 350)}(D \geq 375) = p(D \geq 25) = e^{-\frac{1}{82} \times 25} \approx 0,737$.

3) Calculer l'espérance de la variable aléatoire D et donner une interprétation de ce résultat.

$E(D) = \frac{1}{\lambda} = 82$.

La distance moyenne parcourue sans un incident par un de ces autocars est de 82 km.

4.a) L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/82$.

d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres

N_0 et $e^{-\lambda d}$.

La probabilité qu'un autocar parcourt d km sans accident est $p(D \geq d) = e^{-\frac{1}{82} \times d}$. On répète de façon indépendante N_0 épreuves de Bernoulli de paramètre $e^{-\frac{1}{82} \times d}$, donc X_d suit la loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\frac{1}{82} \times d}$.

Commentaire [A1]: Traduction de la question en une probabilité

Commentaire [A2]: Application des résultats du cours

Commentaire [A3]: Obtenu à la calculatrice

Commentaire [A4]: Traduction de la question en une formule

Commentaire [A5]: Application des résultats du cours

Commentaire [A6]: calculatrice

Commentaire [A7]: C'est une probabilité conditionnelle (référence chapitre sur les probas conditionnelles.)

Commentaire [A8]: Application du principe d'une loi de durée de vie sans vieillissement.

Commentaire [A9]: Application de la définition du cours

Commentaire [A10]: Cours. Application directe du calcul de l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle

Commentaire [A11]: Calcul de la probabilité de l'épreuve de Bernoulli

Commentaire [A12]: Formule du cours

Commentaire [A13]: Définition de 15 sur la loi binomiale. Cette définition est toujours à connaître en TS et donc pour le bac.

4.b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

L'espérance d'une variable X qui suit la loi binomiale de paramètres n et α est $E(X) = n\alpha$. Donc, d'après la réponse à la question 4.a), le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km est $N_0 e^{-\frac{1}{82} \times d}$.

5) La desserte de villages par un circuit de 76 km est effectuée pendant 210 jours dans l'année par des autocars de cette entreprise de telle sorte que les dessertes journalières sont indépendantes et la survenue d'un incident a chaque jour une probabilité

$$q = 1 - e^{-\frac{76}{82}}.$$

On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'incidents dans l'année pour ce circuit. Déterminer l'espérance et la variance de Y .

On répète 210 fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $q = 1 - e^{-\frac{1}{82} \times 76}$, donc Y suit la loi binomiale de paramètres 210 et $1 - e^{-\frac{1}{82} \times 76}$.

Donc $E(Y) = 210 \times (1 - e^{-\frac{1}{82} \times 76}) \approx 127$ et $V(Y) = 210q(1 - q) = 210 \times (1 - e^{-\frac{1}{82} \times 76}) \times e^{-\frac{1}{82} \times 76} \approx 50$.

Commentaire [A14]: Définition de $1^{\text{ère}}$ sur la loi binomiale. A connaître en TS et au bac

Commentaire [A15]: Application de la formule de 1S

Commentaire [A16]: Application de la définition d'une loi binomiale

Commentaire [A17]: Application de la formule de 1S de l'espérance d'une loi binomiale

Commentaire [A18]: Application de la formule de 1S de la variance d'une loi binomiale. Ces deux formules sont à connaître en TS donc au bac