

TP MATHS

Première partie:

1b.

on remarque que lorsque le nombre de proie augmente juste après le nombre de prédateur augmente(car ils se nourrissent), comme les proies se font manger par un grand nombre de prédateur, alors elle diminue et on remarque que juste après le nombre de prédateur diminue aussi(car ils n'ont de moins en moins de proies pour se nourrir) et ensuite comme il y a moins de prédateur alors les proies se faisant moins manger augmente de nouveau et ainsi de suite.

2a. Lorsqu'on prend $L_0=0$ donc une situation où il n'y a pas de prédateur alors le nombre de proie augmente au cours du temps car elles ne se font pas manger par ses derniers.

b. si au contraire on prend $R_0=0$ donc une situation où il n'y a pas de proies alors le nombre de prédateur diminue car il n'ont rien à manger.

3a. Si $L_0=600$ et $R_0=2000$, alors le nombre de proies et prédateurs restent constants.

b. Si L_0 est aux alentours de 600 et R_0 aux alentours de 2000, alors le nombre de prédateur et de proies restent plus ou moins constant avec le temps.

4a. si on diminue la valeur de a alors le nombre de proie diminue car $R_{n+1}=(1+a)R_n-bL_nR_n$ donc si a diminue alors $1+a$ aussi et donc R_{n+1} aussi.

Vu que le nombre de proies diminue (mangés au début par les prédateurs), le nombre de prédateurs aussi (il n'ont plus suffisamment de proies à disposition pour pouvoir nourrir une population croissante). On remarque donc sur le graphique que lorsque le coefficient " a " baisse, les différentes variations de croissance des deux populations se stabilisent jusqu'à devenir constantes.

b. si on augmente b alors la valeur de proies diminue car les valeurs de R_n , L_n , a et b sont tous strictement positif, et comme le nombre des proies au rang $n+1 = (1+a)R_n-bL_nR_n$ alors comme b augmente donc bL_nR_n augmente et qu'il y a un moins devant alors le nombre de proie diminue, et indirectement le nombre de prédateur aussi.

Donc lorsque l'on augmente le coefficient " b ", le nombre de prédateurs descend, et fait sensiblement varier le nombre de proies: il suffit d'une très petite augmentation ou décroissance du nombre de prédateurs pour que le nombre de proies varie de façon très forte, au fur et à mesure que l'on augmente b .

c. De la même manière on remarque que lorsque l'on diminue " c " la population de prédateurs varie très peu alors qu'en comparaison les proies ont des variations beaucoup plus importantes, car quand l'on diminue d les prédateurs ont visiblement besoin de plus de proies pour que leur nombre augmente, de conséquence la population va baisser.

L'on remarque aussi que lorsque l'on augmente d , le nombre max de proies et de prédateurs diminue considérablement, mais cela n'affecte pas beaucoup le rapport entre le nombre de

proies et prédateurs: car la formule de L_{n+1} est une addition, les variations de d auront donc moins "d'impact".

2eme partie

Deuxième partie:

Déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne C .

$$U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ L_n \end{pmatrix} \quad \text{donc } U_{n+1} = \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ L_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_n \\ L_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{ad}{c} \\ -\frac{ad}{b} \end{pmatrix}$$

$$\text{car } \begin{cases} R_{n+1} = R_n - \frac{bd}{c} L_n + \frac{ad}{c} \\ L_{n+1} = \frac{ca}{b} R_n + L_n - \frac{ad}{b} \end{cases}$$

$$U_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -0,2 \\ 0,03 & 1 \end{pmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{pmatrix} R_n \\ L_n \end{pmatrix}}_{U_n} + \underbrace{\begin{pmatrix} 120 \\ -60 \end{pmatrix}}_C$$

a. Si $U = \begin{pmatrix} 2000 \\ 600 \end{pmatrix}$ alors $U = A \times U + C$.

$$\text{car } \begin{pmatrix} 1 & -0,2 \\ 0,03 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2000 \\ 600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$U_{n+1} = A \times U_n + C \quad C = U - (A \times U)$$

$$U_{n+1} = A \times U_n + U - (A \times U)$$

$$U_{n+1} - U = A \times U_n - A \times U$$

$$U_{n+1} - U = A (U_n - U)$$

$$u_{n+1} = A \times u_n + C \quad C = u - (A \times u)$$

$$u_{n+1} = A \times u_n + u - (A \times u)$$

$$u_{n+1} - u = A \times u_n - A \times u$$

$$u_{n+1} - u = A (u_n - u)$$

→ Théorème : Prenons

$$u_{n+1} = A \times u_n + C \quad u_1 = A \times u_0 + C = \begin{bmatrix} 3102 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$u_n = u + A^n \times (u_0 - u) \quad u_1 = u + A^1 \times (u_0 - u) = \begin{bmatrix} 3102 \\ 120 \end{bmatrix}$$

La propriété est vraie

→ Initialisation Supposons que pour tout entier k :

$$u_k = u + A^k \times (u_0 - u) \text{ montrons qu'elle est vraie pour } k+1$$

$$u_{k+1} = A \times (u_k - u) + u$$

$$u_{k+1} = A \times (u + A^k \times (u_0 - u) - u) + u$$

$$u_{k+1} = A^{k+1} \times (u_0 - u) + u \quad \text{La propriété est vraie à nouveau}$$

-> Conclusion: On a donc montré par le principe de récurrence que la propriété P_{n+1} est vraie, donc par récurrence P_n est aussi vraie, donc $u_n = A^n \times (u_0 - u) + u$

$$b. \rightarrow R_0 = 2010 \quad L_0 = 610 \quad \mu_0 = \begin{pmatrix} 2010 \\ 610 \end{pmatrix}$$

$$U_5 = U + A^5 \times (\mu_0 - U) = \begin{bmatrix} 1999,52 \\ 610,88 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{10} = \begin{bmatrix} 1988,79 \\ 610,16 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{50} = \begin{bmatrix} 2011,15 \\ 588,31 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{100} = \begin{bmatrix} 1967,10 \\ 606,84 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow R_0 = 1990 \quad L_0 = 605 \quad \mu_0 = \begin{pmatrix} 1990 \\ 605 \end{pmatrix}$$

$$\mu_5 = \begin{bmatrix} 1985,65 \\ 603,21 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{10} = \begin{bmatrix} 1983,33 \\ 600,3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{50} = \begin{bmatrix} 2018,62 \\ 598,62 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{100} = \begin{bmatrix} 1981,96 \\ 595,64 \end{bmatrix}$$

$$4. a. \begin{cases} R_{n+1} = R_n - 0,2 L_n + 120 \\ L_{n+1} = 0,03 R_n + L_n - 60. \end{cases}$$

car $60 \times 0,2 = 120$

$$\begin{cases} R_{n+1} - R_n = 0,2 (600 - L_n) \\ L_{n+1} - L_n = 0,03 (R_n - 2000) \end{cases}$$

car $60 \times 0,03 = 100$

Si $L_n < 600$ alors $600 - L_n = X$ un nombre
strictement positif.
donc $0,2 \times X > 0$.

$$\text{Donc } R_{n+1} - R_n > 0 \rightarrow R_{n+1} > R_n$$

Donc lorsque le nombre de
prédateur est inférieur à 600, le
nombre de proie augmente car
 $R_{n+1} > R_n$.

$$\text{Mais si } L_n > 600 \text{ alors } R_{n+1} - R_n < 0$$

$$R_{n+1} < R_n$$

Donc le nombre de proie diminue.

$$\text{Si } R_n > 2000 \text{ alors } R_n - 2000 = Y > 0.$$

$$\text{Donc } 0,03 \times Y > 0.$$

$$\text{Donc } L_{n+1} - L_n > 0 \rightarrow L_{n+1} > L_n$$

Si le nombre de proie est supérieur à 2000,
le nombre de prédateur augmente car
 $L_{n+1} > L_n$.

$$\text{Mais si } R_n < 2000 \text{ alors } R_{n+1} - R_n < 0.$$

$$R_{n+1} < R_n$$