TS – Correction du bac blanc à distance du 31 mars 2020

<u>Exercice I</u> :

Partie A

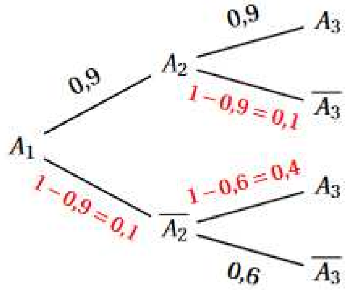
1. On sait que p(C∩F)=0,16. Or, $p_C(F)=\frac{p(C\cap F)}{p(C)}$ d'où p(C)=$\frac{p(C\cap F)}{p_C(F)}=\frac{0,16}{0,8}=0,2$. Donc, 20% de la production du détaillant provident de C.

2. D, B et C forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :
p(F) = p(F∩D) + p(F∩B) + p(F∩C) = 0,75×0,5 + 0,85×0,3 + 0,16 = 0,79.

3. On cherche $p_F(D)$. Or $p_F(D)=\frac{p(D\cap F)}{p(F)}=\frac{0,5\times0,75}{0,79}\approx 0,475$.

Partie B

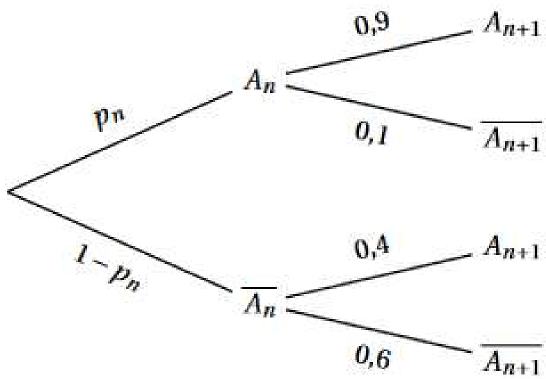
1.a.



b) **b.** D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_3)=P(A_2\cap A_3)+P\left(\overline{A_2}\cap A_3\right)$$
$$=P(A_2)\times P_{A_2}(A_3)+P\left(\overline{A_2}\right)\times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$
$$=0,9\times0,9+0,1\times0,4=0,81+0,04=0,85$$

2.



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n\cap A_{n+1})+P\left(\overline{A_n}\cap A_{n+1}\right)=p_n\times0,9+(1-p_n)\times0,4=0,5p_n+0,4.$$

3.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $p_n>0,8$.

- **Initialisation**

  On sait que $p_1=1$ donc $p_1>0,8$; la propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité**

  Soit un entier naturel $k\geqslant1$ tel que la propriété soit vraie au rang k, c'est-à-dire $p_k>0,8$.
  C'est l'hypothèse de récurrence.

  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k>0,8$ donc $0,5p_k>0,4$ et donc $0,5p_k+0,4>0,8$ qui signifie $p_{k+1}>0,8$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie pour $n=1$ et elle est héréditaire pour tout $k\geqslant1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n\geqslant1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n>0,8$.

4.

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0{,}8$ donc $p_n = v_n + 0{,}8$.

a. • $v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5p_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5(v_n + 0{,}8) - 0{,}4 = 0{,}5v_n + 0{,}4 - 0{,}4 = 0{,}5v_n$

• $v_1 = p_1 - 0{,}8 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = 0{,}2$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.
Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0{,}8$, on en déduit que $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et $-1 < 0{,}5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0. Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0{,}8$ donc la suite (p_n) est convergente et a pour limite 0,8.

Exercice II :

Partie A

1. pour tout x de $]0; +\infty[$, $u'(x) = \frac{1}{x} + 1$. Comme $x \in]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc $u'(x) > 1 > 0$. u est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2. Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.
Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.
D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.
Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.
Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.
0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2 ; 3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0 ; +\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0 ; +\infty[$.

3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit que :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$

2. **a.** f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.
Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}. \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 :$$

$$= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1)$$

$$= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3)$$

$$= \frac{1}{x^2}u(x)$$

b. Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie C

1.

On calcule :

$$\begin{aligned} f(x)-\ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x). \text{ On réduit au dénominateur } x : \\ &= \frac{1}{x}[(x-1)(\ln(x)-2)+2x-x\ln(x)] \\ &= \frac{1}{x}[x\ln(x)-2x-\ln(x)+2+2x-x\ln(x)] \\ &= \frac{1}{x}(2-\ln(x)) \end{aligned}$$

Les abscisses x des points d'intersection de C et de C' vérifient $f(x) = \ln(x)$ c'est-à-dire $f(x)-\ln(x)=0$.

C'est-à-dire $\frac{2-\ln(x)}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \ln(x) = 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 2$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e^2)$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = e^2$.

C et C' se coupent au point de coordonnées $(e^2\,;\,2)$

2. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, par $H'(x) = \frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

$\frac{2-\ln(x)}{x} = \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$. Une primitive de $\frac{2}{x}$ est $2\ln(x)$ et une primitive de $-\frac{\ln(x)}{x}$ est $-\frac{1}{2}[\ln(x)]^2$. Donc, une primitive de $\frac{2-\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est $2\ln(x) - \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$.

<u>Exercice III</u> :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ et

$u_3 = \sqrt{2u_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1{,}8340$ à 10^{-4} près.

b. Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n.

c. D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

2. **a.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

- *Initialisation*

On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0.

- *Hérédité*

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $0 < u_n \leqslant 2$.

On a : $0 < u_n \leqslant 2 \iff 0 < 2u_n \leqslant 4 \iff 0 < \sqrt{2u_n} \leqslant 4 \iff 0 < u_{n+1} \leqslant 2$. L'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.

L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai au rang n, il est vrai au rang $n+1$: on a donc démontré par le principe de récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 2$.

b. Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

Comme pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{2u_n}{u_n^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$.

Et comme on a démontré précédemment que $u_n \leqslant 2$, alors $\dfrac{2}{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} \geqslant 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; (u_n) est une suite croissante.

c. On vient de prouver que d'une part la suite (u_n) est strictement croissante et que d'autre part elle est majorée par 2.

Ceci démontre que la suite (u_n) est convergente.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ donc en particulier :

$u_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

On a aussi pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$, mais $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Alors : $v_{n+1} = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln 2) - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2) = \dfrac{1}{2}v_n$

On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $v_n = -\ln 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \iff \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right) = v_n \iff \dfrac{u_n}{2} = e^{v_n} \iff u_n = 2e^{v_n}$. u_n en fonction de n.

c. Comme $\dfrac{1}{2} \in [0\,;\,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x) = 1$, alors par composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathrm{e}^{v_n}) = 1$ et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 2$

d. L'algorithme ci-dessous permet d' afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1{,}999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n

<u>**Exercice IV**</u> **:**

Partie A : voir cours sur la fonction exponentielle

Partie B :

1) Affirmation 1 :

- On cherche $P_{(D\geqslant 3)}(D \geqslant 10)$. Comme la loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement, $P_{(D\geqslant 3)}(D \geqslant 10) = P(D \geqslant 10-3) = P(D \geqslant 7)$.
- La durée de vie moyenne est de 8 ans, donc la variable aléatoire D a pour espérance mathématique $E(D) = 8$. D'après le cours, $E(D) = \frac{1}{\lambda}$ donc $8 = \frac{1}{\lambda}$ et donc $\lambda = \frac{1}{8}$.
- D'après le cours, $P(D \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$; donc $P(D \geqslant t) = 1 - P(D \leqslant t) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
- On en déduit que $P(D \geqslant 7) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\times 7} \approx 0{,}42$.

L'affirmation 1 est vraie.

2) Affirmation 2 :

- La proportion de dépistages positifs sur 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie est de 3,1 % donc on peut considérer que la probabilité qu'un dépistage soit positif est égale à $p = 0{,}031$.
- On réalise 200 dépistages dont les résultats sont indépendants les uns des autres; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de dépistages positifs suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}031$.
- On cherche donc $P(X > 5)$ c'est-à-dire $1 - P(X \leqslant 5)$.
- À la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}41$ donc $P(X > 5) \approx 0{,}59$.

L'affirmation 2 est vraie.

3) Affirmation 3 :

$p(X<4)=0{,}798 \Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-4\lambda} = 0{,}798 \Leftrightarrow 1-0{,}798 = \mathrm{e}^{-4\lambda} \Leftrightarrow 0{,}202= \mathrm{e}^{-4\lambda} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(0{,}202)}= \mathrm{e}^{-4\lambda} \Leftrightarrow -4\lambda=\ln(0{,}202) \Leftrightarrow$ $\lambda=\frac{\ln(0{,}202)}{-4}$ soit $\lambda \approx 0{,}399872$.

$p(X>5) = \mathrm{e}^{-5\lambda} \approx \mathrm{e}^{-5\times 0{,}399872} \approx 0{,}135 > 10\%$.

L'affirmation 3 est fausse.

4) Affirmation 4 : Chaque secteur correspond à 360/16 = 22,5°.

OSO : 11×22,5 = 247,5°. ONO : 13×22,5 = 292,5°. SO = 10×22,5 = 225° et N : 360°.

On cherche $p_{(225<X<360)}(247{,}5 < X < 292{,}5) = \frac{p((247{,}5<X<292{,}5)\cap(225<X<360))}{p(225<X<360)} = \frac{p(247{,}5<X<292{,}5)}{p(225<X<360)} = \frac{292{,}5-247{,}5}{360-225} = \frac{45}{135} = \frac{1}{3} \neq 0{,}25$.

L'affirmation 4 est fausse.