TS - Semaine du 30 mars au 3 avril 2020 - Correction

Jeudi 2 et vendredi 3 avril : ***TD sur le calcul intégral***

Ex 101 p 209. Si besoin, visionner la capsule sur Maths.Ita :
https://sites.google.com/site/blogmatita/maths-stendhal/ts-2019-2020

101 **1** Pour tout réel x,

$$f(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^{2x}+1} = \frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}+1}.$$

Comme $e^{2x} > 0$, $e^{2x}+1 > 0$ et $(e^x - 1)^2 \geqslant 0$.
Donc pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$.

2 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

Comme $f(x) \geqslant 0$, la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

3 **a.** Pour tout réel t,

$$f(t) = 1 - \frac{2e^t}{e^{2t}+1} = 1 - \frac{2e^t}{e^{2t}(1+e^{-2t})}$$
$$= 1 - \frac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}}.$$

Comme $1 + e^{-2t} \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{1+e^{-2t}} \leqslant 1$.

Donc : $$0 \leqslant \frac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}} \leqslant 2e^{-t},$$

d'où : $$0 \geqslant -\frac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}} \geqslant -2e^{-t}.$$

En ajoutant 1, on a : $1 \geqslant f(t) \geqslant 1 - 2e^{-t}$.

b. Soit un réel $x \geqslant 0$.
D'après la question précédente, en utilisant la relation d'ordre, on a :

$$\int_0^x f(t)\,dt \geqslant \int_0^x (1 - 2e^{-t})\,dt.$$

Donc : $F(x) \geqslant [t + 2e^{-t}]_0^x$.

Ainsi : $F(x) \geqslant x + 2e^{-x} - 2$.
Comme $e^{-x} \geqslant 0$, on a pour tout réel $x \geqslant 0$, $F(x) \geqslant x - 2$.

c. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$, d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

4 Pour tout réel x,

$f(-x) = 1 - \dfrac{2e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = 1 - \dfrac{2e^{x}}{e^{2x} + 1}$ en multipliant par e^{2x} le numérateur et le dénominateur du quotient.

La fonction f est paire, donc :

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t = -F(x).$$

On a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$.

ex 116 p 214 - Suites définies par une intégrale/1 :

116 **1** **a.** La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \frac{4e^t}{e^t + 1}\mathrm{d}t = \left[4\ln(e^t + 1)\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}$$
$$= 4\ln(e^{\ln(n+1)} + 1) - 4\ln(e^{\ln(n)} + 1)$$
$$= 4\ln(n+2) - 4\ln(n+1) = 4\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

2 Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} f(t)\mathrm{d}t + \ldots + \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(t)\mathrm{d}t.$$

En utilisant la relation de Chasles,

$$S_n = \int_{\ln(1)}^{\ln(n+1)} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(n+1)} f(t)\mathrm{d}t$$

$= [4\ln(e^t+1)]_0^{\ln(n+1)} = 4\ln\left(\dfrac{e^{\ln(n+1)}+1}{1+1}\right)$

$= 4\ln\left(\dfrac{n+2}{2}\right).$

La valeur S_n est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \ln(n+1)$.

3 a. Pour tout réel x, $f(x) \leqslant 4$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite horizontale d'équation $y = 4$.

Donc $\mathscr{A} = \int_0^{\ln(n+1)} [4 - f(t)]\mathrm{d}t = 4\ln(n+1) - S_n$

$= 4\ln(n+1) - 4\ln(n+2) + 4\ln(2).$

Donc $\mathscr{A} = 4\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) + 4\ln(2).$

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{A}_n = 4\ln\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\right) + 4\ln(2).$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = 1.$

Donc par composition,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = 4\ln(1) + 4\ln(2) = 4\ln(2).$$

exercice 2 du bac étranger 2019 que vous pouvez trouver à l'adresse :
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Centres_etrangers_13_juin_2019_DV.pdf
Suites définies par une intégrale/2 :

Exercice II — 6 points

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Si $u_1 = 0$, on a $u_2 = 2u_1 - 1 = -1$ puis $u_3 = 3u_2 - 1 = -4$ et $u_4 = 4u_3 - 1 = -16 - 1 = -17$ donc $\boxed{u_4 = -17}$.
2. Complétons l'algorithme pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13} :

```
Pour N allant de 1 à 12
        U ← (N + 1) ∗ U − 1
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
$-0,2$	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
$-6\,634$	29 654
$-66\,341$	296 539
$-729\,752$	3 261 928
$-8\,757\,025$	39 143 135
$-113\,841\,326$	508 860 754

So $u_1 = 0,7$, il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et si $u_1 = 0,8$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $e = e^1$.

1. Soit F, définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, par : $F(x) = (-1-x)e^{1-x}$.
   F est dérivable (produit et composée de fonctions dérivables) et $F'(x) = -e^{1-x} + (-1-x)\times\left(-e^{1-x}\right) = xe^{1-x} = f(x)$ donc $F' = f$:
   F est bien une primitive de f.

2. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{1-x}\,dx = F(1) - F(0) = -2 + e = \boxed{e-2}$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

   $$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

   On en déduit $I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = \boxed{2e-5}$.

4. (a) Sur $[0\,;\,1]$, $1 - x \leqslant 1$ donc, comme la fonction exponentielle est croissante, $e^{1-x} \leqslant e^1 = e$ donc $0 < e^{1-x} \leqslant e$. (puisque la fonction exponentielle est positive)
   En multipliant par x^n supérieur ou égal à 0 sur $[0\,;\,1]$, on en déduit : $\boxed{0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e}$.

   (b) $\displaystyle\int_0^1 x^n e\,dx = e\int_0^1 x^n$ (linéarité) $= e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{e}{n+1}}$.

(c) Par conservation de l'ordre :

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$, donc $\displaystyle\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n e\,dx = \frac{e}{n+1}$ donc $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{n+1}\right) = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

Partie C

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n.$$

- **Initialisation** :
  Pour $n = 1$, $1!(u_1 - e + 2) + I_1 = (u_1 - e + 2) + I_1 = u_1 - e + 2 + e - 2 = u_1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité** : on suppose que, pour un rang n quelconque, on a : $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$.

Alors : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 = (n+1)[n!(u_1 - e + 2) + I_n] - 1$
$= (n+1)!(u_1 - e + 2) + (n+1)I_n - 1 = (n+1)!(u_1 - e + 2) + I_{n+1}$.
La propriété est donc **héréditaire**.

La propriété est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$: d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$.

(a) Si $u_1 = 0,7$, alors $u_1 - e + 2 < 0$ car $e \approx 2,718$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} [(n+1)!(u_1 - e + 2)] = -\infty$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)! = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$
donc, par somme,
$\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

(b) Cette fois, $u_1 = 0,8$ donc $u_1 - e + 2 > 0$; on en déduit cette fois que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} [(n+1)!(u_1 - e + 2)] = +\infty$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.