Produit scalaire de deux vecteurs du plan

Définition

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par: $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,;\vec{v})}$.

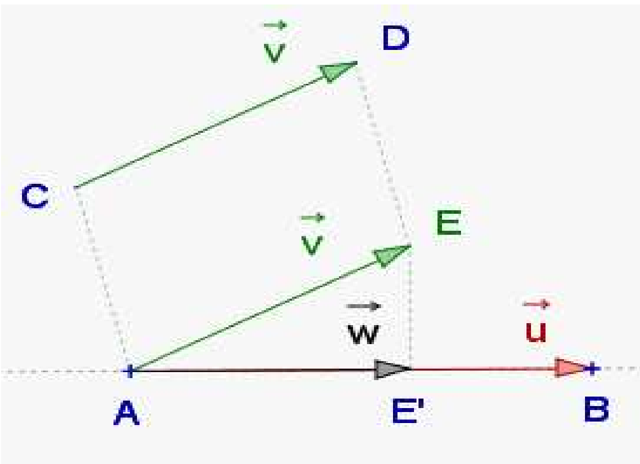
Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, on pose alors: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

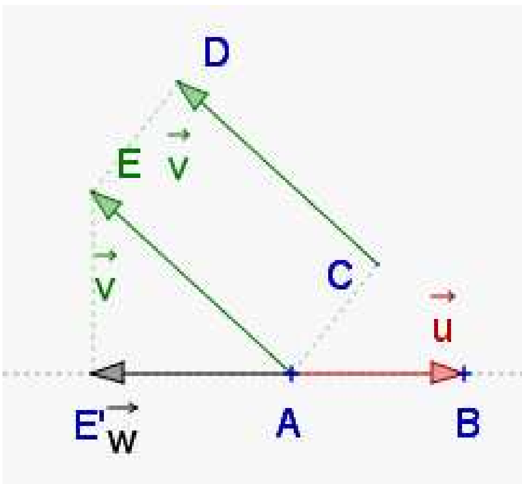
Propriétés

Les preuves de ces propriétés seront faites en classe.

1) $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,;\vec{v})}$.
   Pas besoin d'utiliser les angles orientés, car: $\cos(\vec{v}\,;\vec{u})=\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$
2) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on a: $\cos(\vec{u}\,;\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$.

   Cas de deux vecteurs unitaires. Si $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$, alors: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.
3) Carré scalaire: $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
4) En supposant que $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan, on peut écrire: $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}}$.
5) $(-\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(-\vec{v})=-(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $(-\vec{u})\cdot(-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v}$.
6) Cas des vecteurs colinéaires:
   Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, on a:
   $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **colinéaires de même sens**.
   $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **colinéaires de sens contraire**.
7) Utilisation des projetés orthogonaux.





   $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE'}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ où E' est le projeté orthogonal de E sur la droite *(AB)*.

   On a donc: $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AE'=\|\vec{u}\|\times\|\vec{w}\|$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens.
   $\vec{u}\cdot\vec{v}=-AB\times AE'=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{w}\|$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraire.
8) Expression du produit scalaire en **repère orthonormal**:
   Si, dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on a: $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors: $\vec{u}\cdot\vec{u'}=xx'+yy'$

   Conséquences:

   a) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

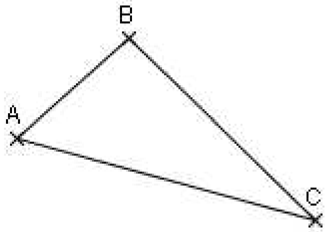
   b) Si d est la droite de coefficient directeur m
   et d' la droite de coefficient directeur m', alors: $d\perp d'\Leftrightarrow mm'=-1$

9) Lien entre produit scalaire et opérations sur les vecteurs:
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et pour tout $a\in\mathbb{R}$, $(a\,\vec{u})\cdot\vec{v}=a\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

10) Norme de la somme de deux vecteurs:

On a: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}[\,\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\,]$

Application au triangle:



On a: $AC^2=AB^2+BC^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

Dans le cas particulier où le triangle *ABC* est rectangle en *B*, on retrouve le théorème de Pythagore !

11) Norme de la différence de deux vecteurs:

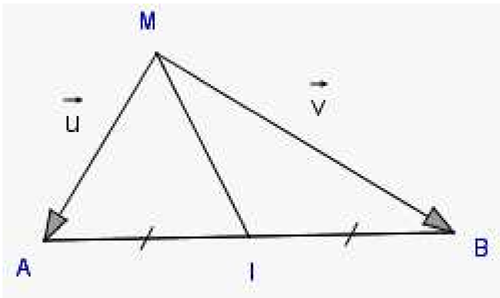
On a: $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}[\,\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\,]$

Application au triangle: $BC^2=AB^2+AC^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
Dans le cas particulier où le triangle *ABC* est rectangle en *A*, on retrouve le théorème de Pythagore !

Théorème d'Al Kashi:
En notant $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$ et $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})=\hat{A}$, on a: $\boxed{a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos\hat{A}}$

12) Autre formules:
$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ $\quad\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\,(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$ $\quad\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\,\vec{u}\cdot\vec{v}$

13) Théorèmes de la médiane:



[MI] est la médiane issue de *M* dans le triangle *MAB*

En notant: $\vec{u}=\overrightarrow{MA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{MB}$, on a:

$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\,\overrightarrow{MI}$

$\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

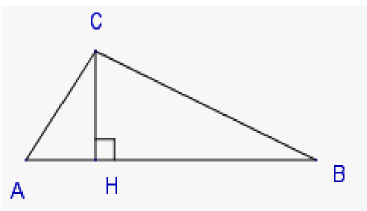
Les formules précédentes donnent alors:

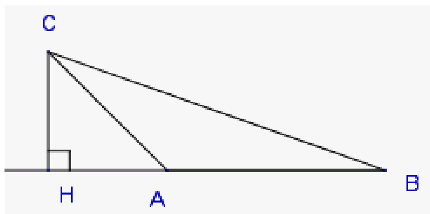
a) Premier théorème de la médiane: $MA^2+MB^2=2\,MI^2+\frac{1}{2}\,AB^2$

b) Deuxième théorème de la médiane: $MA^2-MB^2=2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}$

c) Troisième théorème de la médiane: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2=MI^2-IA^2$

14) Autres relations métriques dans le triangle:





a) Aire d'un triangle: $aire(ABC)=\frac{1}{2}\,AB\times AC\times\sin(\widehat{BAC})$

b) Propriété des sinus: $\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}=\frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})}=\frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})}$

Dans un triangle, les sinus des angles sont proportionnels à la mesure des côtés opposés.