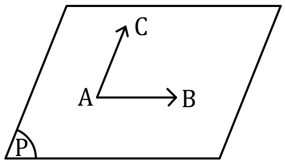
PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

I) Produit scalaire dans le plan et dans l'espace



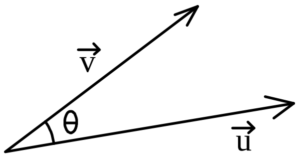
1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace. Choisissons trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan (ABC). $\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}$ ($\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ étant calculé dans le plan $\mathscr{P}$)

2) Cette définition du produit scalaire dans l'espace permet de prolonger les définitions et propriétés vues dans le plan en 1S, à savoir :

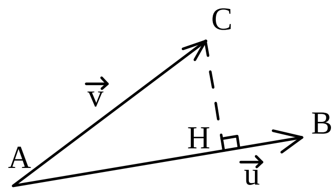
<u>a) Définitions</u> :

- $\vec{u}^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$



$\theta = (\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$

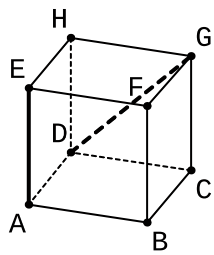
- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$



- Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$.
- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

<u>b) Propiétés</u> : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant 3 vecteurs de l'espace et α un réel :

- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
- $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$
- $(\alpha\vec{u}) \bullet \vec{v} = \alpha(\vec{u} \bullet \vec{v})$



<u>3) Exemple</u> : ABCDEFGH est un cube d'arête a. Calculer $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{DG}$…

$\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DH} \bullet \overrightarrow{DG}$
$= \overrightarrow{DH} \bullet \overrightarrow{DH}$
$= DH^2$
$= a^2$

<u>4) Expression analytique du produit scalaire</u> :

$(O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **désigne un repère orthonormal de l'espace.**

Comme en 1S, on montre que : **si** $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ **alors** $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

II) Interprétation vectorielle de l'orthogonalité dans l'espace

<u>1) Orthogonalité de deux vecteurs</u> :

a) A, B et C sont 3 points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
$\iff \|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
$\iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} \perp \vec{v}$

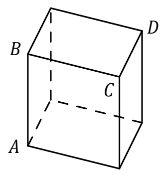
Dans l'espace, comme dans le plan, on peut étendre la notion d'orthogonalité de 2 vecteurs à la propriété suivante : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff$ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux** .

(Remarque : le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur de l'espace.)

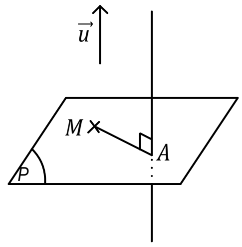
2) Droites orthogonales :

On en déduit directement que :

(AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.



3) Droites et plans perpendiculaires :

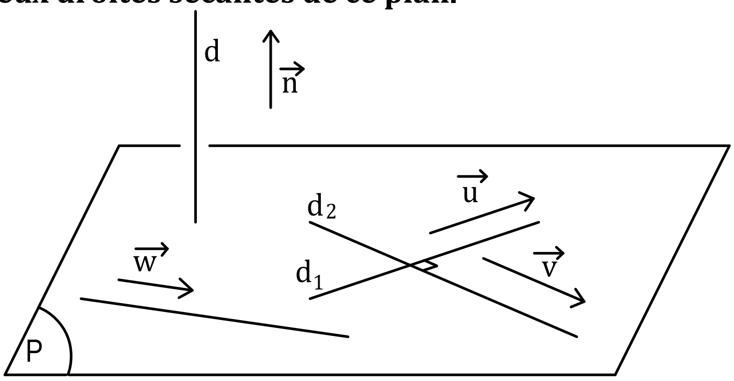


a) Un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à un plan $\mathscr{P}$ lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

b) $\vec{u} \neq \vec{o}$. $\vec{u}$ est un **vecteur normal à** $\mathscr{P}$ lorsque $\vec{u}$ est orthogonal à $\mathscr{P}$.

c) $\vec{u}$ est un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$. Δ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. $\mathscr{P}$ et Δ sont sécants en A. Pour tout point M de $\mathscr{P}$ on a $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$. On peut donc écrire que : **Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.**

d) Théorème : **une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.**



Démonstration (BAC) :

$\boxed{=>}$ Soit d une droite orthogonale à toute droite d'un plan $\mathscr{P}$ et d_1 et d_2 deux droites orthogonales de $\mathscr{P}$. Comme d est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$ alors d est orthogonale à d_1 et à d_2.

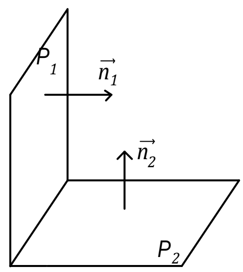
$\boxed{<=}$ Réciproquement, soient d_1 et d_2 deux droites perpendiculaires d'un plan $\mathscr{P}$ et d une droite orthogonale à d_1 et à d_2. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ les vecteurs directeurs respectifs de d_1, d_2 et d. On a donc $\vec{n} \bullet \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \bullet \vec{v} = 0$. Soit Δ une droite quelconque de $\mathscr{P}$, de vecteur directeur $\vec{w}$.

$\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, donc il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$\vec{n} \bullet \vec{w} = \vec{n} \bullet (a\vec{u} + b\vec{v}) = \vec{n} \bullet a\vec{u} + \vec{n} \bullet b\vec{v} = a\vec{n} \bullet \vec{u} + b\vec{n} \bullet \vec{u} = a \times 0 + b \times 0 = 0$. Donc $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, donc Δ et d sont orthogonales.

4) Plans perpendiculaires :

Propriété : **Le plan $\mathscr{P}_1$ de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ et le plan $\mathscr{P}_2$ de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2} = 0$.**



III) Equation cartésienne d'un plan

$(O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne un repère orthonormal de l'espace.

1.a) Théorème : Dans un repère orthonormal de l'espace :
Tout plan $\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont trois réels non tous nuls. $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
Réciproquement : **a, b, c et d étant 4 réels tels que a, b et c sont non tous nuls. L'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.**

b) Démonstration (BAC) :
$\boxed{=>}$ Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Le plan $\mathscr{P}$ contenant A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + cz \underbrace{-ax_A - by_A - cz_A}_{d} = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

$\boxed{<=}$ Réciproquement, considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M(x ; y ; z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont 4 réels tels que a, b et c sont non tous nuls.
Supposons que $a \neq 0$ (sinon on fait la démonstration pour b ou pour c).
Le point de coordonnées $\left(-\frac{d}{a}; 0\,; 0\right)$ est un point de $\mathscr{F}$ car $a \times \frac{-d}{a} + b \times 0 + c \times 0 + d = -d + d = 0$. $\mathscr{F}$ est donc non vide.
Soit A (x_0 ; y_0 ; z_0) un point de $\mathscr{F}$. Comme A $\in \mathscr{F}$ alors $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \Leftrightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \vec{n} \bullet \overrightarrow{AM} = 0 \text{ avec } \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

M est donc un point du plan contenant A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

c) Exemple : Déterminer une équation cartésienne du plan contenant A et de vecteur normal $\vec{n}$ avec :
A(3 ; -1 ; 2) et $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

En posant M(x ; y ; z), on trouve $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$.
$\vec{n} \bullet \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 1\times(x - 3) - 3\times(y + 1) - 5\times(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 5z + 4 = 0$
$x - 3y - 5z + 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A(3 ; -1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.